

0.1 T-model structure

T-structure の添え字を変えておく。Gelifant/Manni による index は cochain complex を model につけられているので、ここでは chain complex を model に考えたい。

Remmark 0.1.1

$\mathcal{D}$ を triangulated category としたとき、その t-structure とは $\mathcal{D}$ の strictly full subcategory の組 $(\mathcal{D}_{\leq 0}, \mathcal{D}_{\geq 0})$ で次の条件を満たすものである。ただし、 $\mathcal{D}_{\geq n} = [n](\mathcal{D}_{\geq 0})$, $\mathcal{D}_{\leq n} = [n](\mathcal{D}_{\leq 0})$ とかく。

1. $\mathcal{D}_{\geq 0}$ is closed under $[1]$ and $\mathcal{D}_{\leq 0}$ is closed under $[-1]$

つまり、 $\mathcal{D}_{\geq 1} \subset \mathcal{D}_{\geq 0}$, $\mathcal{D}_{\leq 0} \subset \mathcal{D}_{\leq 1}$

2. 任意の $X \in \mathcal{D}$ に対し、

$$A \longrightarrow X \longrightarrow B \longrightarrow A[1]$$

が triangle で $A \in \mathcal{D}_{\geq 0}$, $B \in \mathcal{D}_{\leq -1}$ となるものが存在する。

3. 任意の $X \in \mathcal{D}_{\geq 0}$, $Y \in \mathcal{D}_{\leq -1}$ に対し、 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = 0$

Definition 0.1.2

$$H_n = \tau_{\leq 0} \tau_{\geq 0}[-n] : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$$

と定義し、 n 次 homology functor と呼ぶ。また、 $E \in \mathcal{A}$ に対し、

$$H^n(-; E) = \text{Hom}(-, E[n]) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

と定義し、 E を係数とする n 次 cohomology functor と呼ぶ。このとき、

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

を triangle としたとき、

$$\cdots \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(Y) \longrightarrow H_n(Z) \longrightarrow H_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H^n(X; E) \longrightarrow H^n(Y; E) \longrightarrow H^n(Z; E) \longrightarrow H^{n+1}(X; E) \longrightarrow \cdots$$

が exact である。

Definition 0.1.3

M を pointed model category としたとき、 $f \in \text{Hom}_M(X, Y)$ に対し、functorial factorization を用いて

$$f : X \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{p} Y$$

と分解する。ただし、 i は cofibration で p を acyclic fibration とする。このとき、 i の cofiber を $\text{hocofib} f$ で定義する。このとき、 $\text{Ho}(M)$ は pre-triangulated category なので

$$X \xrightarrow{\gamma(f)} Y \longrightarrow \text{hocofib} f$$

は $\text{Ho}(M)$ における cofiber sequence である。同様に、

$$f : X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} Y$$

を j が acyclic cofibration で q が fibration で分解する。このとき、 $\text{Ker} q = \text{hofib} f$ とかく。このとき、

$$\text{hofib} f \longrightarrow X \xrightarrow{\gamma(f)} Y$$

は fiber sequence である。

Remmark 0.1.4

M を stable model category のとき、任意の $f \in \text{Mor}(M)$ に対し、 $\text{hocofib} f \cong \Sigma \text{hofib} f$ である。

proof) stable model category ならば $\text{Ho}(M)$ において fiber sequence と cofiber sequence は一致するので、

$$\text{hofib} f \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow \text{hocofib} f$$

が triangle になるため。

□

Definition 0.1.5

M を stable model category とし、 $\mathcal{D} = \text{Ho}(M)$ は t-structure を持つ triangulated category とする。このとき、

$$M^{\geq(\leq)n} = \{X \in M \mid \exists Y \in \mathcal{D}^{\geq(\leq)n} \text{ s.t. } X \sim Y\}$$

という $\mathcal{M}$ の full subcategory が定義できる。つまり localization の $\gamma : M \longrightarrow \mathrm{Ho}(M) = \mathcal{D}$ に対し、 $\gamma(M^{\leq(\geq)n}) = \mathcal{D}^{\leq(\geq)n}$ である。

$M^{\leq(\geq)0}$ はある意味 M の t-structure といえる。というのも $\mathcal{D}^{\leq(\geq)0}$ の性質の多くを引き継いでいるからである。 M には triangle が無いので、それ以外の定義は満たしている。

Remmark 0.1.6

1. $M_{\geq(\leq)n}$ is closed under $\Sigma(\Omega)$
2. $X \in M_{\geq(\leq)n} \iff \Omega^n X \in M_{\geq(\leq)0}$
3. $X \in M_{\geq 0}, Y \in M_{\leq -1}$ に対し、 $\mathrm{Hom}_M(X, Y) = 0$
4. $M_{\geq(\leq)n}$ is closed under retract

proof) (1)、(2) は定義を考えれば分かる。(3) は $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = 0$ であり、 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ は $\mathrm{Hom}_M(X, Y)$ に weak equivalence の inverse を形式的に付け加えたものである、 $\mathrm{Hom}_M(X, Y) = 0$ である。(4) は $\mathcal{D}_{\geq(\leq)n}$ が retract で閉じていることによる。

□

Definition 0.1.7

M を stable model category とし、 $\mathcal{D} = \mathrm{Ho}(M)$ は t-structure を持つ triangulated category とする。このとき、

$$W_n = \{f \in \mathrm{Mor}(M) \mid \mathrm{hofib} f \in M_{\geq n}\} = \{f \in \mathrm{Mor}(M) \mid \mathrm{hoco}f \in M_{\geq n+1}\}$$

$$coW_n = \{f \in \mathrm{Mor}(M) \mid \mathrm{hoco}f \in M_{\leq n}\} = \{f \in \mathrm{Mor}(M) \mid \mathrm{hofib} f \in M_{\leq n-1}\}$$

と定義し、class of (co) n -equivalence と呼ぶ。

Example 0.1.8

$M = Ch_R$ をとすると、 $\mathrm{Ho}(M) \cong \mathcal{D}(\mathbf{Mod}_R)$ であり t-structure を持つ triangulated category である。

$$W_n = \{f \in \mathrm{Hom}_M(X, Y) \mid (f_m)_* : H_m(X) \longrightarrow H_m(Y) \text{ が } m < n \text{ で同型で } m = n \text{ で全射である。}\}$$

$$coW_n = \{f \in \mathrm{Hom}_M(X, Y) \mid (f_m)_* : H_m(X) \longrightarrow H_m(Y) \text{ が } m > n \text{ で同型で } m = n \text{ で単射である。}\}$$

Example 0.1.9

$M = \mathcal{S}$ で category of spectra としたとき、 $\mathrm{Ho}(M)$ は Postnikov t-structure をもつ triangulated category である。このとき、

$$W_n = \{f \in \mathrm{Hom}_M(X, Y) \mid (f_m)_* : \pi_m(X) \longrightarrow \pi_m(Y) \text{ が } m < n \text{ で同型で } m = n \text{ で全射である。}\}$$

$$coW_n = \{f \in \mathrm{Hom}_M(X, Y) \mid (f_m)_* : \pi_m(X) \longrightarrow \pi_m(Y) \text{ が } m > n \text{ で同型で } m = n \text{ で単射である。}\}$$

Lemma 0.1.10

1. W_n is closed under Σ , and coW_n is closed under Ω
2. $W_n \subset W_{n-1}$ であり、 $coW_{n-1} \subset coW_n$
3. weak equivalence であることと n-equivalence でありかつ、co-n-equivalence であることは同値である。
4. W_n, coW_n are closed under retract

proof) (1) は $f : X \longrightarrow Y$ の cofiber sequence を伸ばすと、

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow \mathrm{hocofib} f \longrightarrow \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \longrightarrow \Sigma(\mathrm{hocofib} f) \cong \mathrm{hocofib}(\Sigma f)$$

は triangle in $\mathcal{D}$ であるため、最後の同型が成り立つ。あとは $\mathcal{D}_{\geq n}$ が Σ で閉じていることによる。(2) も同じく $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}_{n-1}$ に従う。

(3) は $f : X \longrightarrow Y$ を考えたとき、

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow \mathrm{hocofib} f \longrightarrow \Sigma X$$

は $\mathcal{D}$ での triangle であるが、 $\mathcal{D}$ の t-structure は triangulated homology を取ったとき、次数より上（下）で 0 になっている object で構成されていた。これより、 H_* を考えると、

$$H_n(X) \longrightarrow H_n(Y) \longrightarrow H_n(\mathrm{hocofib} f) \longrightarrow H_{n-1}(X) \longrightarrow H_{n-1}(Y)$$

が exact in $\mathcal{A}$ になる。このとき、 f が weak equivalence であることと、

$$f_* : H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$$

が isomorphisc になることは同値であった。よって、 f が weak equivalence である
とすると、 $H_*(\text{hocofib}f) = 0$ であり、 $\text{hocofib}f \in \mathcal{D}_{\geq n+1} \cap \mathcal{D}_{\leq n}$ であるので、 f は
 n -equivalence かつ co- n -equivalence である。逆は今の逆をたどればよい。

(4) は $f : X \rightarrow Y \in W_n$ に対し、retract の図式を考えると、

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{\quad} & X & \xrightarrow{\quad} & A \\
 \downarrow g & & \downarrow f & & \downarrow g \\
 B & \xrightarrow{\quad} & Y & \xrightarrow{\quad} & B \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{hocofib}g & \cdots \cdots \rightarrow & \text{hocofib}f & \cdots \cdots \rightarrow & \text{hocofib}g
 \end{array}$$

において、

$$\text{hocofib}g \rightarrow \text{hocofib}f \rightarrow \text{hocofib}g$$

以外の横列は合成すると恒等射であり、 $\text{hocofib} : \text{Mor}(M) \rightarrow M$ は functor である
ため、上の合成も恒等射である。つまり、 $\text{hocofib}g$ は $\text{hocofib}f$ の retract であること
を表しているが、今 $\text{hocofib}f \in M_{\geq n+1}$ であるが、 $M_{\geq n+1}$ が retract で閉じているこ
とによる。

□

Lemma 0.1.11

M を stable model category とし、 $\mathcal{D} = \text{Ho}(M)$ は t-structure を持つ triangulated
category とする。このとき、 $f \in \text{Hom}_M(X, Y)$, $g \in \text{Hom}_M(Y, Z)$ に対し、

1. $f, g \in (co)W_n$ ならば、 $g \circ f \in (co)W_n$
2. $f \in (co)W_{n-1}$, $g \circ f \in (co)W_n$ ならば、 $g \in (co)W_n$
3. $g \in (co)W_{n+1}$, $g \circ f \in (co)W_n$ ならば、 $f \in (co)W_n$

proof) octahedral axiom から、

$$\text{hocofib}f \rightarrow \text{hocofib}(g \circ f) \rightarrow \text{hocofib}g \rightarrow \Sigma(\text{hocofib}f)$$

の triangle が $\mathcal{D}$ において存在し、あとはこのうちの2つがどこに属するかによって残り一つの所属が決定するという命題による。

□

Lemma 0.1.12

M を stable model category とし、 $\mathcal{D} = \text{Ho}(M)$ は t-structure を持つ triangulated category とする。このとき、 $W_n, (co)W_n$ are closed under based changes along fibrations and cobased changes along cofibrations.

Theorem 0.1.13

M を stable model category とし、 $\mathcal{D} = \text{Ho}(M)$ は t-structure を持つ triangulated category とする。このとき、 $\bigcap_n W_n$ が class of weak equivalence と等しいとする。このとき、 $f \in \text{Hom}_M(X, Y)$ に対し次の条件は同値である。

1. f が weak equivalence である。
2. $H_*(f) : H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$ が isomorphism in core of $\mathcal{D}$
3. $H^*(f) : H^*(Y; E) \longrightarrow H^*(X; E)$ が isomorphism for all E in core of $\mathcal{D}$